

ARTÍCULO - Tesis Premiadas Convocatoria de Premios RADE 2024

Diseño geométrico óptimo de los escudos protectores de estructuras espaciales Optimal geometrical design of protective shields for space structures

Javier Rodríguez Cuadrado*

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid.

javier.rodriguez.cuadrado@upm.es

RESUMEN

El desarrollo de la industria espacial puede provocar su propia desaparición. El crecimiento de la actividad espacial implica un aumento sin precedentes de la basura espacial que, junto a la radiación, puede suponer la inhabilitación o destrucción de las astronaves. Ante esta problemática, en esta investigación diseñamos un escudo que proteja a las astronaves frente a los impactos y la radiación minimizando el peso. Para ello, diseñamos en primer lugar tres estructuras, dos de ellas patentadas y una de estas en proceso de comercialización, basadas en geometría fractal que distribuyen de manera óptima la fuerza. En segundo lugar, atendemos la protección frente a la radiación mediante un estudio de diferentes distribuciones porosas para concluir que todas ofrecen el mismo nivel promedio de protección, aunque las distribuciones regulares tienen peligrosas fallas. Completamos el estudio radiactivo optimizando la forma de interfaces para disipar el calor, concluyendo que las estructuras fractales son efectivas cuando desarrollan esta característica en las zonas de alta temperatura. Finalmente, estas investigaciones nos llevan a atender problemáticas en diferentes áreas: el estudio de la forma de los árboles tras carga, el desarrollo de un método versátil de simulación de terrenos y la definición de una clase de funciones fractales.

PALABRAS CLAVE: Industria espacial, basura espacial, radiación, escudos protectores, fractales.

ABSTRACT

The development of the space industry may lead to its own extinction. The growth of space activity implies an unprecedented increase in space debris which, together with radiation, can lead to the disabling or destruction of spacecraft. Faced with this problem, in this research we designed a shield to protect spacecraft against impacts and radiation while minimizing weight. To this end, we first designed three structures, two of them patented and one of them in the process of commercialization, based on fractal geometry that optimally distribute the force. Secondly, we address radiation protection by studying different porous distributions to conclude that they all offer the same average level of protection, although regular distributions have dangerous flaws. We complete the radiative study by optimizing the shape of interfaces to dissipate heat, concluding that fractal structures are effective when they develop this feature in high temperature zones. Finally, these investigations lead us to address problems in different areas: the study of the shape of trees after load, the development of a versatile method of terrain simulation and the definition of a class of fractal functions.

KEYWORDS: Space industry, space debris, radiation, protective shields, fractals.

*El autor fue galardonado con el Premio Real Academia de Doctores de España-Ciencias Experimentales y Tecnológicas en la Convocatoria de Premios a la Investigación RADE 2024 a la mejor tesis doctoral por su tesis *Optimización de la geometría de los escudos de estructuras espaciales y sus aplicaciones*.

1. LA INDUSTRIA ESPACIAL Y SUS AMENAZAS

La industria espacial es un pilar indispensable de nuestra sociedad. La navegación (marítima, aérea y terrestre) y el transporte asociado, las telecomunicaciones, la observación terrestre (predicción meteorológica y explotación del medio) y la exploración espacial son las actividades más destacadas. El aumento constante de la demanda de los servicios asociados a estas actividades motiva el desarrollo tecnológico y crecimiento del sector.

A nivel económico, este crecimiento se aprecia en la previsión al alza del presupuesto de agencias espaciales como la NASA (1). Por otro lado, dicho crecimiento también se ve reflejado en la evolución del número de vehículos espaciales que son lanzados cada año, con un fuerte aumento en el último lustro (ver Figura 1.1) (2). En estos lanzamientos, el tipo de vehículo enviado al espacio por excelencia es el satélite artificial (2), y dentro de estos, cabe destacar la irrupción de los micro y nano satélites. El atractivo de esta clase de artefactos radica en su bajo peso, ya que la minimización del peso es un factor clave en la industria espacial debido al elevado coste asociado a cada kg puesto en órbita (3).

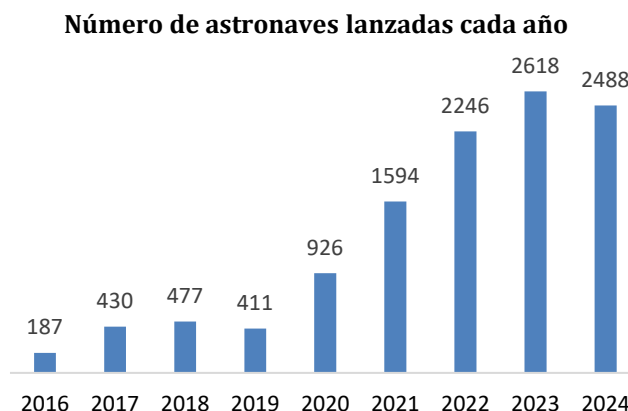


Figura 1.1. Número de astronaves lanzadas en el período 2016-2024.

Sin embargo, el aumento de nanosatélites y otro tipo de astronaves conlleva en sí mismo una grave amenaza: el aumento de la basura espacial. Esta basura se compone de piezas de astronaves, pintura, partes de cohetes, etc. (4), y se estima que actualmente hay en órbita 54.000 partículas de basura mayores de 10 cm y 1,2 millones entre 1 cm y 10 cm (5). El peligro de la basura espacial es su elevada energía cinética, ya que puede impactar contra las astronaves a velocidades de hasta 15 km/s, lo que generaría graves daños en las mismas (6). Además de la basura espacial, los satélites y otras astronaves deben afrontar también la amenaza de la radiación, en especial la radiación de partículas. La inutilización o destrucción de los satélites debido a la basura espacial o la radiación generaría pérdidas económicas muy elevadas, ya que se perderían la inversión realizada para construirlos (que puede ser de cientos de millones de euros (7)) y los beneficios por el servicio que prestan (sólo la

industria del satélite generó \$285B en 2023 (8)). Por esta razón, es indispensable proteger las astronaves, y en particular los satélites, de forma efectiva.

Actualmente, la protección de las astronaves se lleva a cabo mediante el escudo Whipple (9). Este escudo se forma de capas planas y paralelas de aluminio, Nextel ® y Kevlar ®, separadas entre sí una cierta distancia para fragmentar y dispersar la energía de las partículas que impactan, complementadas con una capa de aislante térmico para la radiación. Las principales investigaciones se centran en los materiales (10, 11, 12), aunque también se está experimentando sobre la geometría de las capas (13, 14, 15). Sin embargo, en los satélites y nanosatélites no se implementa una protección específica, sino que se utiliza la propia estructura como escudo, ya que el escudo Whipple es demasiado voluminoso y masivo para ser implementado en este tipo de satélites. Por este motivo, es vital explorar escudos con formas geométricas más allá de las capas planas y paralelas.

El objetivo fundamental de esta investigación es optimizar el diseño de los escudos protectores de las astronaves para que, con el mínimo peso, maximicen la resistencia al impacto y aseguren una protección efectiva contra la radiación. La consecución de este objetivo fundamental requiere que se cumplan los siguientes objetivos parciales: 1) Diseñar una estructura para distribuir las fuerzas generadas en el impacto (Sección 2), 2) Integrar en el escudo la protección frente a la radiación (Sección 3), 3) Disipar el calor generado (Sección 4) y 4) Buscar aplicaciones en otras ramas (Secciones 5, 6, 7 y 8).

2. DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE FUERZAS

En esta sección mostramos diferentes estructuras capaces de distribuir de manera óptima la fuerza del impacto de partículas de basura espacial. Dado que dichas partículas son de tamaño reducido, modelizamos la fuerza de su impacto como puntual. Además, consideramos la dirección de dicha fuerza perpendicular a la del soporte de las estructuras (ya que estas se pueden orientar según las direcciones preferentes de impacto) y que dicha fuerza es estática, por simplicidad.

Por tanto, damos solución al siguiente problema: dada una fuerza puntual estática, ¿qué estructuras permiten distribuir dicha fuerza de forma óptima? Muchos problemas de optimización, como este, son resueltos de forma natural empleando estructuras fractales (16, 17, 18). Guiados por esta idea, nos centramos en una estructura básica de la ingeniería, el triángulo, y buscamos los fractales asociados, encontrando el triángulo de Sierpinski (ver Figura 2.1).

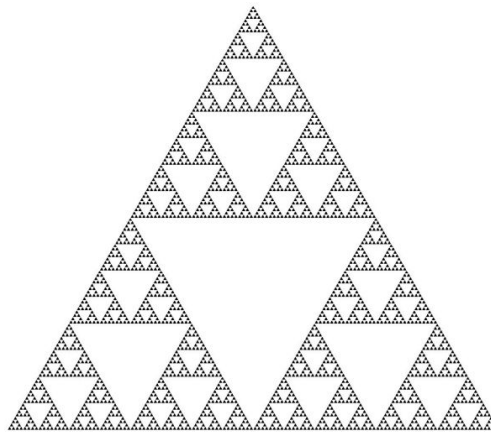


Figura 2.1. Triángulo de Sierpinski.

En cuanto al tipo de estructura, en esta investigación nos centramos en estructuras tipo cercha, debido a su rápida, sencilla y económica instalación. Las cerchas están formadas por barras unidas mediante nodos, y conectadas al soporte mediante apoyos puntuales. En este caso, consideramos tres tipos de apoyos: elástico (se opone al movimiento con una resistencia proporcional a la distancia que recorre el apoyo, como un muelle), móvil (no se opone al movimiento) y fijo (se opone al movimiento con una resistencia infinita y no permite que el apoyo se desplace).

Por último, la distribución óptima de fuerzas buscada es la distribución uniforme, ya que es la única que garantiza que el máximo de fuerza sea el mínimo posible, y por tanto exige la mínima resistencia a la astronave. Por ello, las estructuras buscadas transformarán una carga puntual en una carga uniforme.

2.1. Estructura bidimensional con apoyos fijos

El triángulo de Sierpinski se forma mediante un proceso iterativo basado en la generación de cuatro triángulos, uno de ellos invertido, dentro de un mismo triángulo (ver Figura 2.1). Este proceso, repetido infinitamente, genera el fractal, pero a nivel ingenieril debemos quedarnos con un número finito de iteraciones, obteniendo un prefractal. Si tomamos un prefractal del triángulo de Sierpinski de N iteraciones y disponemos un apoyo allí donde haya un vértice de triángulo en su base, tenemos que esa estructura es mecánicamente equivalente a una Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles (ver Figura 2.2). Denotamos por L la longitud de las barras inclinadas del primer nivel y por β al ángulo de inclinación de dichas barras.

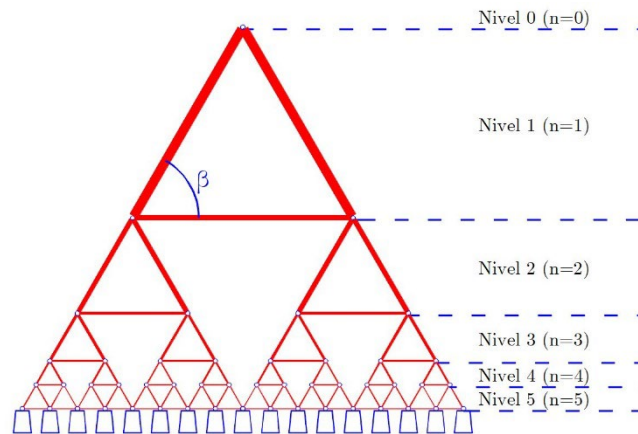


Figura 2.2. Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles, correspondiente a $N = 5$.

La Estructura tiene un número finito de apoyos, por lo que aproximamos la distribución uniforme en el soporte haciendo que cada apoyo soporte un valor de fuerza proporcional al área que cubre cada apoyo; esto es, los apoyos exteriores soportarán una fuerza de valor $F/2^N$, mientras que los interiores soportarán una fuerza de valor $F/2^{N-1}$. El criterio de distribución uniforme determina, mediante la primera ley de Newton, los esfuerzos que han de soportar las barras de la estructura. Por otro lado, como se mencionó en la introducción, es necesario minimizar el peso de la estructura. Para ello, debemos garantizar que ninguna barra de esta esté sobre dimensionada, por lo que todas deben trabajar al mismo valor de tensión. Este criterio, una vez conocido el esfuerzo de cada barra, determina el área de la sección transversal de todas las barras de la estructura, denotando por A el área de la sección transversal de las barras del primer nivel. Por otro lado, consideramos que todas las barras son del mismo material, cuyo módulo de elasticidad denotamos por E . Además, en primera instancia, tomaremos los apoyos de la estructura como fijos en las dos direcciones del plano. De esta manera, la Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles queda definida mecánicamente.

La Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles es una estructura hiperestática, esto es, dispone de un número de apoyos y barras mayor del necesario para garantizar la estabilidad estructural. En una estructura hiperestática, el sistema de cargas y esfuerzos de las barras no sólo ha de cumplir la primera ley de Newton, sino también las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones. En particular, la Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles tiene un grado de hiperestaticidad de $2^{N-1} - 1$, por lo que ha de cumplir ese número de ecuaciones de compatibilidad de deformaciones. Dichas ecuaciones vienen dadas por el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV).

El cumplimiento de las ecuaciones del PTV y la satisfacción de los criterios de distribución uniforme y misma tensión en las barras lleva a que tengan que permitirse desplazamientos verticales en los apoyos de la estructura. Esto puede conseguirse disponiendo apoyos

elásticos verticalmente, pero fijos horizontalmente. Operando, llegamos al siguiente teorema (19):

Teorema 2.1. *Sea una Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles con apoyos fijos horizontales que soporta una carga puntual vertical de valor F en su vértice superior tal que los nodos de sus apoyos exteriores se desplazan una misma cantidad D . Una carga vertical uniforme por unidad de área en sus apoyos se genera si y sólo si el desplazamiento vertical δ_i del nodo del apoyo i -ésimo es:*

$$\delta_i = D - 2\Omega T\left(\frac{i-1}{2^N-1}\right), \quad i = 1, \dots, 2^{N-1},$$

donde $\Omega = \frac{F L}{\tan^2(\beta) A E}$ y T es la función de Takagi.

La función de Takagi T es una función fractal (ver Figura 2.3). Por tanto, la distribución de carga uniforme se obtiene si y sólo si los apoyos se desplazan verticalmente siguiendo una combinación lineal de una función fractal: la función de Takagi.

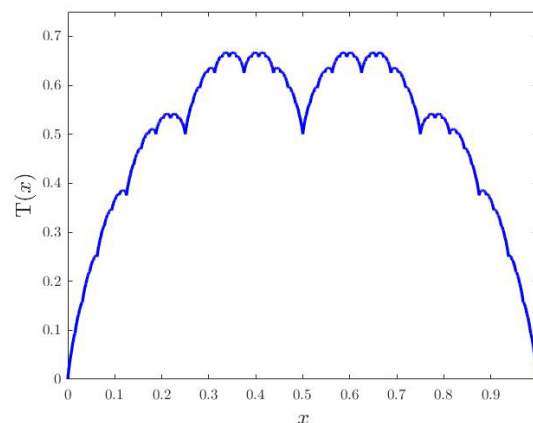


Figura 2.3. Función de Takagi.

Una Estructura de quasi-Sierpinski de N niveles cuyos apoyos se desplazan verticalmente siguiendo una combinación lineal de la función de Takagi permite obtener una distribución uniforme de cargas en la base. Cuanto mayor sea el nivel N , mayor será el número de apoyos y por tanto más cerca estará la distribución obtenida de la uniforme. Recalamos que dicha esta Estructura es óptima desde un punto de vista de distribución de cargas, al requerir la mínima resistencia del soporte, y de peso, al soportar todas sus barras el mismo valor de tensión. Por último, indicamos que la distribución uniforme no sólo se obtiene al comprimir la estructura, sino también al traccionarla.

2.2. Estructura bidimensional con apoyos móviles

La solución aportada en la Sección 2.1 es óptima bajo dos criterios. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, no es práctica al requerir la obtención y colocación de apoyos con características diferentes muy específicas. Por este motivo, vamos a generalizar el diseño geométrico y mecánico de la Estructura de quasi-Sierpinski para facilitar su construcción y aplicación, a cambio de sacrificar la condición de optimalidad de igualdad de tensión de las barras.

La nueva solución es la Estructura de quasi-Sierpinski genérica (ver Figura 2.4). En esta estructura, las barras inclinadas de un nivel n , con $n = 1, 2, \dots, N$, forman un ángulo con la horizontal que denotamos por β_n , pudiendo ser distinto para cada nivel. Por otro lado, el producto del área de la sección transversal por el módulo de elasticidad de las barras inclinadas de un nivel n (magnitud que denotamos por J_n) puede ser cualquiera, mientras que para las barras horizontales del nivel n este producto ha de ser $\frac{J \tan(\beta_1)}{2^{n-1} \tan(\beta_n)}$, siendo J el valor del producto para la barra horizontal del primer nivel. Por último, los apoyos son fijos verticales pero móviles horizontales salvo uno, que también es fijo horizontal para dar estabilidad al conjunto.

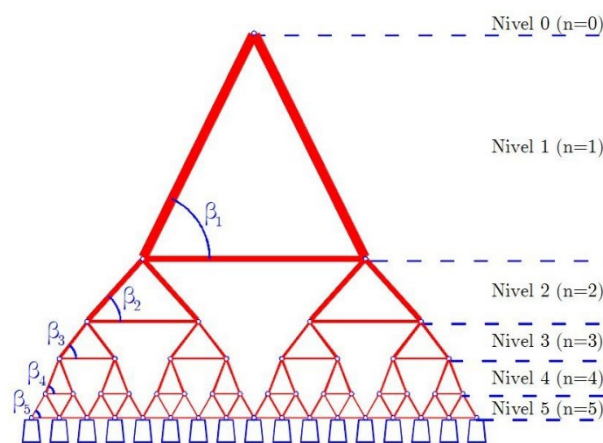


Figura 2.4. Estructura de quasi-Sierpinski genérica de N niveles, correspondiente a $N = 5$.

La Estructura de quasi-Sierpinski genérica de N niveles también es hiperestática. Sin embargo, en este caso, la disposición de apoyos móviles horizontales y la selección establecida de los productos de área y módulo de elasticidad de las barras horizontales hace que se cumplan las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones sin necesidad de aplicar ningún cambio a la estructura. Por ello, enunciamos el siguiente teorema (20):

Teorema 2.2. *Sea una Estructura de quasi-Sierpinski genérica de N niveles. Si la estructura soporta una carga puntual vertical de valor F en su vértice superior, entonces se genera una carga vertical uniforme por unidad de área en sus apoyos.*

Por tanto, la Estructura de quasi-Sierpinski genérica genera una distribución uniforme de carga. Además, aunque no se haya tomado como condición de diseño, puede cumplir el criterio de optimalidad de igualdad de valor de tensión en sus barras, aunque su definición genérica permite adaptarse a otras condiciones de diseño y aun así obtener la distribución uniforme de carga. También es interesante notar que esta Estructura permite disponer diferentes materiales en sus barras (siempre que se cumpla la regla de los productos de área y módulos de elasticidad establecidos), a lo que añadimos la flexibilidad geométrica que aportan los diferentes ángulos de las barras inclinadas. Gracias a su carácter innovador, hemos patentado esta estructura (“Estructura soporte para la distribución uniforme de cargas sobre un segmento recto y prisma soporte para la distribución uniforme de cargas sobre una superficie”, nº ES2909950).

2.3. Estructura tridimensional con apoyos móviles

La Estructura de la Sección 2.2, bidimensional, tiene un diseño geométrico basado en el nacimiento de un nuevo triángulo de menor tamaño en cada nodo de la estructura. Si aplicamos este concepto a un diseño tridimensional y generamos una pirámide en cada nodo, obtenemos la Pirámide de quasi-Sierpinski genérica de N niveles (ver Figura 2.5).

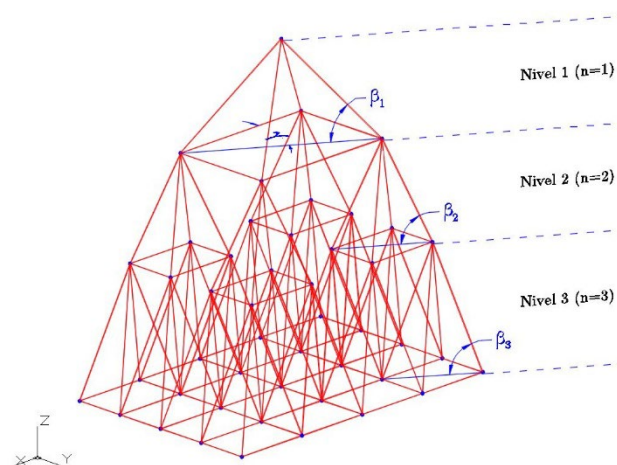


Figura 2.5. Pirámide de quasi-Sierpinski genérica de N niveles, correspondiente a $N = 5$.

En esta estructura, los ángulos de inclinación de las barras inclinadas también pueden ser distintos según el nivel. Respecto a la magnitud producto de área de sección transversal y módulo de elasticidad, distinguimos los siguientes casos:

- Barras inclinadas: este producto, que denotamos por J_n para las barras inclinadas del nivel n , puede ser cualquiera siempre que sea el mismo para todas las barras de un mismo nivel.

- Barras horizontales dirección X: Sea J^X el valor del producto de las barras horizontales dirección X del primer nivel, distinguimos dos casos:
 - Barras del nivel $n = 1, 2, \dots, N - 1$ y barras exteriores del nivel $n = N$ (pertenecientes al perímetro de la base): el producto es $\frac{J^X \tan(\beta_1)}{4^{n-1} \tan(\beta_n)}$.
 - Barras interiores del nivel $n = N$ (no pertenecientes al perímetro de la base): el producto es $\frac{2 J^X \tan(\beta_1)}{4^{n-1} \tan(\beta_n)}$.
- Barras horizontales dirección Y: Sea J^Y el valor del producto de las barras horizontales dirección Y del primer nivel, distinguimos dos casos:
 - Barras del nivel $n = 1, 2, \dots, N - 1$ y barras exteriores del nivel $n = N$: el producto es $\frac{J^Y \tan(\beta_1)}{4^{n-1} \tan(\beta_n)}$.
 - Barras interiores del nivel $n = N$: el producto es $\frac{2 J^Y \tan(\beta_1)}{4^{n-1} \tan(\beta_n)}$.

En cuanto a los apoyos, establecemos que todos los apoyos, salvo dos, sean fijos verticales y móviles horizontales en las direcciones X e Y. Otro apoyo, que puede ubicarse en cualquier nodo del nivel N , es fijo vertical y horizontal en las direcciones X e Y. Por último, el último apoyo, que puede ubicarse en cualquier nodo del nivel N , es fijo vertical, fijo horizontal en una dirección no coincidente con la de la recta que une este apoyo y el descrito en el punto anterior y móvil horizontal en la dirección perpendicular a esta última.

Como en la Estructura de quasi-Sierpinski genérica de N niveles, la Pirámide también es hiperestática. De nuevo, la disposición de apoyos móviles horizontales y la selección establecida de los productos de área y módulo de elasticidad de las barras horizontales en ambas direcciones hace que se cumplan las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones sin necesidad de aplicar ningún cambio a la estructura. Por ello, enunciamos el siguiente teorema (20):

Teorema 2.3. *Sea una Pirámide de quasi-Sierpinski genérica de N niveles. Si la estructura soporta una carga puntual vertical de valor F en su vértice superior, entonces se genera una carga vertical uniforme por unidad de área en sus apoyos.*

Por tanto, la Pirámide de quasi-Sierpinski genérica genera una distribución uniforme de carga. De nuevo, puede cumplir el criterio de optimalidad de igualdad de valor de tensión en sus barras, permite disponer diferentes materiales (siempre que se cumpla la regla de los productos de área y módulos de elasticidad establecidos) y tiene la flexibilidad geométrica asociada a los diferentes ángulos de las barras inclinadas. Por último, notemos

que en este caso la distribución uniforme es superficial y no lineal. Gracias a su carácter innovador, hemos patentado esta estructura (“Estructura soporte para la distribución uniforme de cargas sobre una superficie”, nº ES2909433).

3. PROTECCIÓN FRENTE A LA RADIACIÓN

Una vez atendida la distribución de fuerzas de impacto, ahora nos centramos en resolver otro problema fundamental para los satélites: la radiación. En particular, nos planteamos si, dada una masa fija, existe una distribución de dicha masa que maximice la protección frente a la radiación. En una primera aproximación, en esta investigación tratamos el caso bidimensional.

Las estructuras protectoras básicas se dividen en porosas y multicapa (21), las cuales modelamos mediante un rectángulo de ancho B con porciones de su superficie vaciadas mediante círculos o rectángulos de igual anchura y menor altura, respectivamente. En el caso de las estructuras porosas, vaciamos el rectángulo mediante N círculos que no solapan y que ocupan un área $B \cdot p$. En particular, consideramos tres tipos de estructuras porosas (ver Figura 3.1): en rejilla (RG), hexagonal (RH) y aleatoria (UR). En el caso de la multicapa (S), vaciamos el rectángulo mediante rectángulos de ancho B y altura tal que la suma de las alturas de todos los rectángulos sea igual a p (ver Figura 3.1). Por ello, la fracción de área vaciada en todas las estructuras es siempre p .

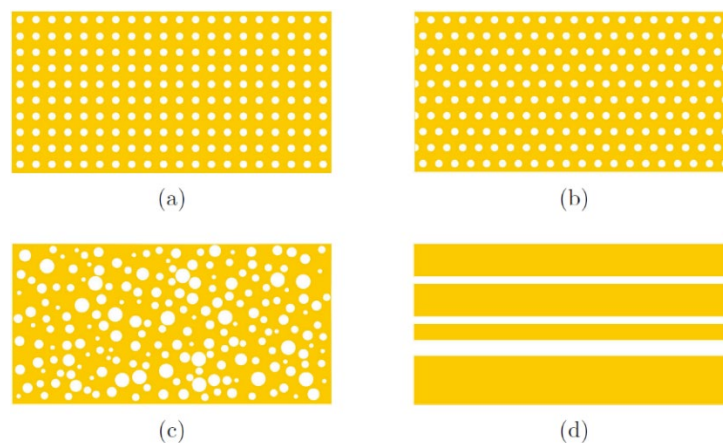


Figura 3.1. (a) Estructura porosa en rejilla (RG), (b) Estructura porosa hexagonal (RH), (c) Estructura porosa aleatoria (UR) y (d) Estructura multicapa (S).

Modelamos los rayos o trayectorias de partículas radiactivas por una recta L que interseca al rectángulo en un punto de su base a distancia v del vértice inferior izquierdo y en un punto del lado opuesto a su base a distancia w del vértice superior izquierdo. Dada una recta, la protección que ofrece una distribución viene dada por la cantidad de material

sólido que encuentra dicha recta al intersectar al rectángulo. Por tanto, definimos las siguientes variables (ver Figura 3.2):

- Ángulo de incidencia β : ángulo formado por la recta que modela al rayo o trayectoria y la base del rectángulo. Notemos que cualquier recta viene dada por v y β .
- Distancia sólida $G_\tau(v, \beta)$: suma de las longitudes de los segmentos de la recta que se encuentran dentro del rectángulo sobre las zonas no vaciadas, con $\tau = RG, RH, UR, S$. Esta variable representa con cuánta materia sólida se encuentra el rayo o trayectoria a su paso por el rectángulo.
- Diferencia sólida $\omega_\tau(v, \beta)$: Para una recta dada, diferencia entre la distancia sólida de la estructura τ y la distancia sólida de la estructura multicapa S , esto es, $\omega_\tau(v, \beta) = G_\tau(v, \beta) - G_S(v, \beta)$, con $\tau = RG, RH, UR$. Esta variable representa cuán superior es la protección de la estructura τ con respecto a la multicapa (tomada como referencia ya que el escudo actual, el Whipple, es multicapa).

Dado que los rayos o trayectorias radiactivas pueden tener cualquier dirección, realizamos un estudio estadístico de la variable $G_\tau(v, \beta)$ para cada distribución para así determinar cuál es el nivel de protección de cada una. Para ello, para cada distribución, generamos Z rectas diferentes para obtener una muestra de β y G_τ (en el caso de la estructura UR , repetimos este proceso también con M disposiciones diferentes de círculos, al ser aleatoria). Dada una muestra, consideramos la función de distribución F_{G_τ} de G_τ . En el caso de la estructura S , obtenemos F_{G_S} teóricamente, pero para las estructuras restantes el estudio es excesivamente complejo a nivel teórico, por lo que obtenemos el estimador $F_{G_\tau}^*$ de la función de distribución (la función de distribución empírica).

Los resultados obtenidos muestran que, según aumenta el número de círculos N de una distribución (y, por tanto, disminuye el tamaño de estos ya que la fracción p es constante), más cerca está la distribución empírica $F_{G_\tau}^*$ de las tres distribuciones porosas de la distribución F_{G_S} de la multicapa (22). Es decir, cuando N tiende a infinito, el nivel de protección de las estructuras porosas converge al de la multicapa en distribución de probabilidad. Si realizamos un análisis más exhaustivo, encontramos que, para cualquier rayo o trayectoria, exceptuando a un conjunto pequeño para las estructuras RG y RH , cuando N tiende a infinito la distancia sólida de cualquier distribución converge a la multicapa (22). Esto significa que, para un número N suficientemente grande, la protección de todas las estructuras es la misma, probabilísticamente e incluso para cualquier rayo o trayectoria (exceptuando a dicho conjunto “pequeño” para las estructuras RG y RH).

En la Figura 3.2 mostramos la evolución de la diferencia sólida $\omega_{RG}(v, \beta)$ según N en función del ángulo β , en radianes. Apreciamos que, según aumenta N , las diferencias se

concentran progresivamente en torno a la recta que simboliza la diferencia nula, salvo para un conjunto de ángulos β . Demostramos que estos ángulos son aquellos para los cuales la tangente es un número racional, y por tanto el conjunto es de medida nula (22). Además, y como se muestra en la Figura, dicho conjunto tiene forma fractal, ya que muestra patrones repetidos a diferentes escalas (en la Figura, a mayor intensidad del rojo, mayor cercanía al fractal teórico correspondiente a N tendiendo a infinito). Sin embargo, este conjunto de medida nula desaparece cuando evaluamos la estructura aleatoria UR (ver Figura 3.3). Esto se debe a que no hay una colocación regular de los círculos y por tanto la convergencia de la diferencia sólida al valor cero se da independientemente de si la tangente del ángulo es racional o irracional (22).

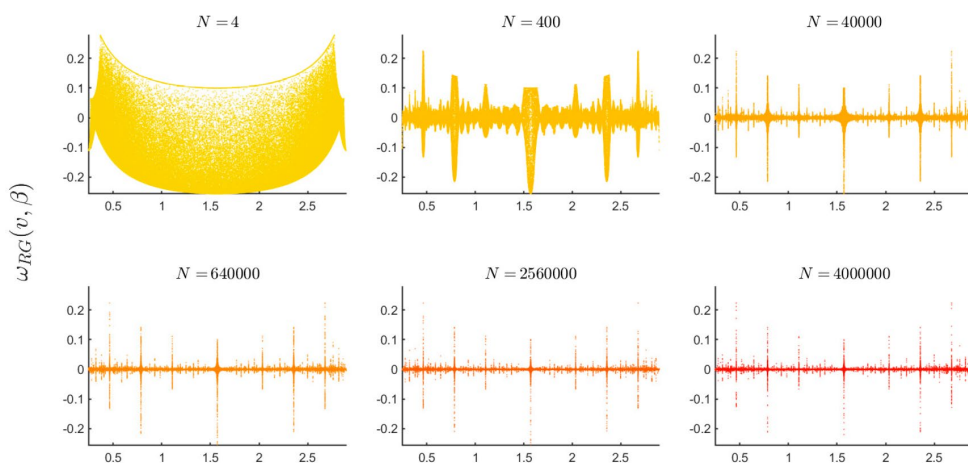


Figura 3.2: Diferencia sólida $\omega_{RG}(v, \beta)$ en función de β para diferentes valores de N para la estructura RG con $B = 4$ y $p = 0,1$.

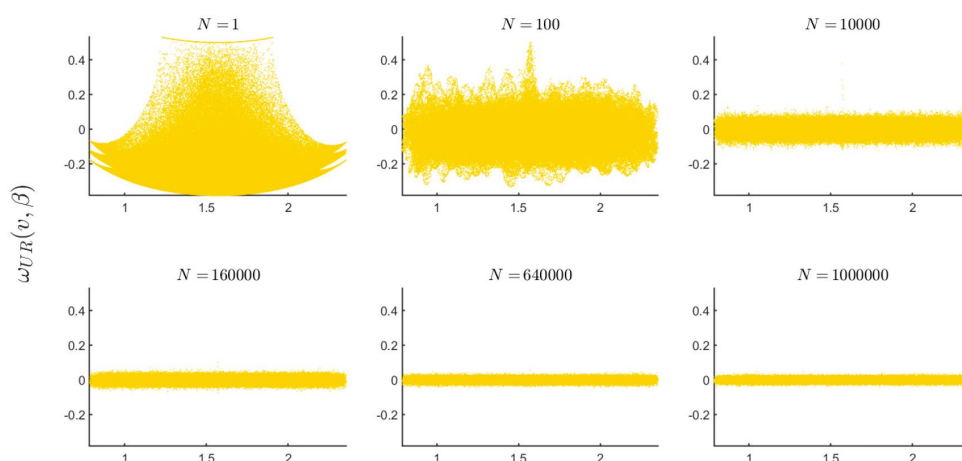


Figura 3.3: Diferencia sólida $\omega_{UR}(v, \beta)$ en función de β para diferentes valores de N para la estructura UR con $B = 1$ y $p = 0,5$.

La equivalencia del material sólido atravesado por un rayo o trayectoria arbitraria independientemente de su distribución tiene una clara utilidad en el blindaje nuclear. Por una parte, proporciona validez al cálculo de la porosidad p de un material mediante el coeficiente de atenuación lineal de la radiación (23). Por otra, justifica el uso de materiales porosos con fines de blindaje, lo que es especialmente relevante ya que el hormigón es un material poroso barato y fácil de usar (24, 25). Si aplicamos estos resultados a la protección de los satélites, tenemos que, dada una masa fija, ha de elegirse la estructura más resistente a los impactos, ya que la radiación atraviesa la misma cantidad de materia. También es vital señalar el peligro que supone la singularidad fractal de las estructuras regulares RG y RH , ya que, si se sigue trabajando en una instalación nuclear con blindaje de estructura porosa regular, se producirá una irradiación fatal.

Por último, explicamos los fractales encontrados en los patrones de difracción de rayos X de materiales amorfos con granos finos de material monocristalino (26, 27). Los granos no tienen una orientación fija, pero la orientación de los rayos X sí es constante. Esto es equivalente a mantener la estructura regular de un grano con orientación fija e irradiarlo desde todas las direcciones, lo cual es el método aplicado en nuestra investigación

4. DISIPACIÓN DEL CALOR

En los procesos de frenado de partículas propios de la protección frente al impacto y la radiación se produce calor que es necesario disipar. Por este motivo, esta investigación se centra ahora en optimizar la forma de una interfaz altamente conductora para maximizar el drenaje de calor.

En particular, el problema consiste en encontrar la forma óptima de una interfaz que divide un dominio en dos subdominios, uno de los cuales contiene una fuente de calor, para minimizar la temperatura máxima en dicho subdominio. De entre todas las posibles formas que puede tomar esta interfaz, nos centramos en un conjunto de mixturas asimétricas de prefractales de Koch (ver Figura 4.1). El fractal de Koch en el que se basan estas mixturas se forma mediante un proceso iterativo que consiste en dividir un segmento en tres partes iguales y sustituir la parte central por dos segmentos de igual longitud que las partes restantes, de manera que cada nuevo segmento forme un ángulo de 60° con la dirección del segmento original (ver Figura 4.1); es decir, se “hace crecer” una parte del segmento. Por su parte, la mixtura asimétrica de Koch permite realizar este proceso con ángulos diferentes, no necesariamente iguales a 60° , en cada uno de los segmentos. En esta investigación utilizamos dichas mixturas prefractales ya que 1) están formadas por segmentos, lo que facilita su fabricación, y 2) pueden formar diferentes estructuras en sus distintas partes, lo que permite que la interfaz se adapte a las condiciones del problema.

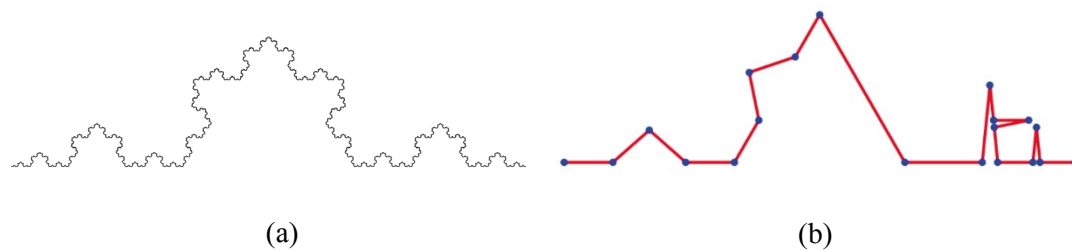


Figura 4.1. (a) Fractal simétrico de Koch y (b) ejemplo de mixtura asimétrica de un prefractal de Koch.

Como vemos, estos prefractales se construyen iterativamente, por lo que la solución óptima se puede generar mediante un proceso iterativo. Dada la interfaz correspondiente a una determinada iteración, el proceso consiste en elegir un segmento de esta y hacer crecer su parte central una cierta cantidad. El segmento elegido en cada iteración es el segmento con el mayor flujo de calor, ya que este es el que presenta la mayor diferencia de temperaturas entre los dos subdominios, y el objetivo es obtener una distribución de temperaturas lo más uniforme posible. Por otra parte, la cantidad que hacemos crecer la parte central del segmento es aquella que minimiza la temperatura en el subdominio con la fuente de calor. Esta cantidad puede ser cero, es decir, lo mejor puede ser no hacer crecer ese segmento, con lo cual se descartaría para siguientes iteraciones. Este proceso iterativo para cuando la interfaz no presenta ningún segmento para crecer, ya que esto significa que ningún crecimiento mejora la interfaz conseguida, asumiendo por tanto que esta es la óptima.

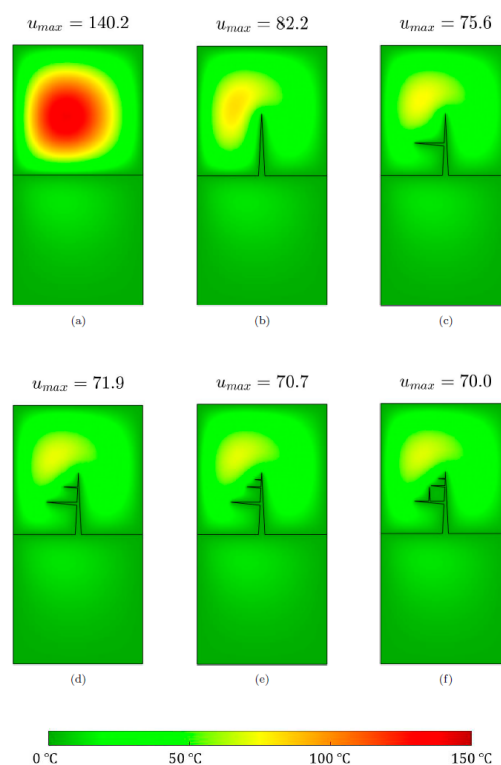


Figura 4.2. Crecimiento iterativo (a)-(f) del prefractal de la mixtura asimétrica de Koch, mapas de calor correspondientes y valor de la temperatura máxima u_{max} en grados Celsius.

Mediante este proceso se generan interfaces que se aproximan iterativamente a la fuente de calor (ver Figura 4.2). Esto se debe a que los segmentos que crecen primero son los de mayor flujo de calor, y estos son los más cercanos a la fuente, y lo óptimo es que crezcan lo máximo posible hacia ella, ya que la interfaz es altamente conductora. Notemos que con este proceso conseguimos una reducción del 50% de la temperatura máxima u_{max} en el dominio (28).

Estos resultados son lógicos desde un punto de vista físico, ya que la interfaz es más conductora que el resto del dominio, por lo que constituye un camino más eficiente para disipar el calor. Por ello, cuanto más cerca esté la interfaz de los puntos de máxima temperatura del dominio, más eficientemente se disipa el calor. Por otra parte, este crecimiento ha de estar equilibrado con el aumento de longitud de la interfaz, ya que un aumento de la longitud implica un aumento de resistencia al flujo de calor a través de ella. Por ello, no es efectivo hacer crecer la interfaz en todos los puntos, sino que es más conveniente hacerla crecer únicamente en las partes suficientemente cercanas a la fuente de calor para compensar el aumento de resistencia por la longitud.

Por otra parte, la posición de la fuente de calor afecta a la forma de la interfaz óptima. Si la fuente está centrada, la interfaz sólo hace crecer una punta y el proceso termina, ya que ningún crecimiento de ningún segmento la hace acercarse más a la fuente (ver Figura 4.3a). Por otro lado, si la fuente está en un lado, la interfaz se desarrolla hacia ella, generando incluso puntas secundarias (28) (ver Figura 4.3b).

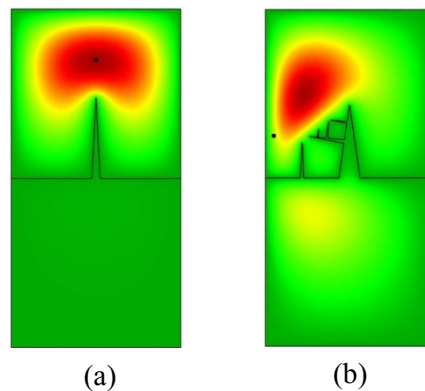


Figura 4.3. Interfaz óptima y mapa de calor dada una fuente de calor (a) centrada y (b) en un lado. El centro de la fuente de calor se representa mediante un punto negro.

La conductividad de la interfaz es otro factor para considerar. Independientemente de la conductividad, el crecimiento de una interfaz implica un aumento de resistencia dado. Sin embargo, a mayor conductividad, mayor es el drenaje de calor. Por tanto, a mayor conductividad, menor es la penalización relativa del aumento de resistencia al flujo de calor con respecto al drenaje, y, por tanto, más crece la interfaz (28).

Como conclusiones de esta investigación, las interfaces basadas en prefractales de mixturas asimétricas de Koch permiten disipar el calor de manera efectiva, consiguiendo una reducción de temperatura máxima de hasta el 50%. Esto se debe a que estas mixturas permiten un crecimiento local, desarrollándose sólo en las zonas de mayor temperatura. Esta reflexión tiene otra lectura: no todos los fractales son apropiados para dar forma a estas interfaces para disipar calor. En particular, aquellos fractales que presenten formas intrincadas en zonas de baja temperatura tendrán una alta resistencia al flujo de calor sin que ello implique un alto efecto drenador.

5. DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS ARBÓREAS

En la Sección 2 hemos visto cómo las estructuras fractales como la de quasi-Sierpinski son útiles para la distribución de fuerzas. Notemos que, si le damos la vuelta a dicha estructura, obtenemos una estructura que se asemeja a la de un árbol, lo que da origen al estudio de dos problemas, uno biológico y otro arquitectónico.

El problema biológico surge de la propia morfología de la estructura y es de especial interés dada la importancia de los árboles en nuestro entorno por razones ecológicas y económicas. Los árboles necesitan ser analizados desde un punto de vista mecánico para determinar cómo se deforman y así determinar la forma del árbol cuando alcanza el equilibrio tras ser cargado en su copa (peso de la lluvia, nieve, hojas, etc.). En particular, el estudio de la copa y sus deformaciones tras carga es de gran importancia para varios procesos relacionados con la humedad y temperatura en la copa (29, 30), la lluvia (31, 32) y simulaciones de bosques (33) para la dispersión de semillas, polen y fuegos. Por otra parte, el problema arquitectónico aparece al comprobar que las estructuras arbóreas son ampliamente utilizadas para el soporte de cargas, por lo que es necesario conocer sus deformaciones tras carga para determinar sus correctas condiciones de servicio.

En esta investigación utilizamos como modelo de análisis el árbol binario bidimensional (ver Figura 5.1). Esta estructura se compone de barras que se bifurcan progresivamente; en particular, un árbol binario de P niveles es un árbol en el que todos los caminos que unen la base con la copa incluyen P bifurcaciones, generándose un nuevo nivel tras cada bifurcación. Las estructuras de los árboles son de nodos rígidos, por lo que habrá que considerar para el cálculo esfuerzo axial (dirección de la barra), cortante (perpendicular a la dirección de la barra) y momento flector (perpendicular al plano del árbol). La reducción de longitud de razón $1/2$ de nivel a nivel garantiza que los nodos de la copa estén a la misma distancia, por lo que consideramos que la carga aplicada en su copa se distribuye uniformemente entre todos ellos.

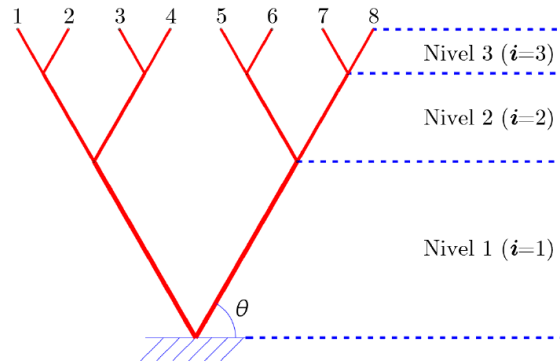


Figura 5.1. Estructura de árbol binario de P niveles, correspondiente a $P = 3$.

En esta estructura, denotamos por L a la longitud de las barras del primer nivel y por θ al ángulo de inclinación. Además, denotamos por I , A y A' a la inercia, área de sección transversal y área a cortante, respectivamente, de las barras del primer nivel, y por a , u y v los factores de reducción de dichas magnitudes, respectivamente, de un nivel al siguiente (pensemos que las ramas de los árboles se estrechan en su camino a la copa). Finalmente, denotamos por E y G a los módulos de Young y elasticidad transversal, respectivamente, del material de las barras.

El objetivo es calcular la deformación de la estructura de árbol binario definida con los parámetros geométricos y mecánicos anteriormente mencionados. Para ello, calculamos los desplazamientos verticales y horizontales por unidad de carga que sufren los nodos de la estructura tras aplicar en cada nodo de la copa una carga vertical hacia abajo de valor $1/2^P$.

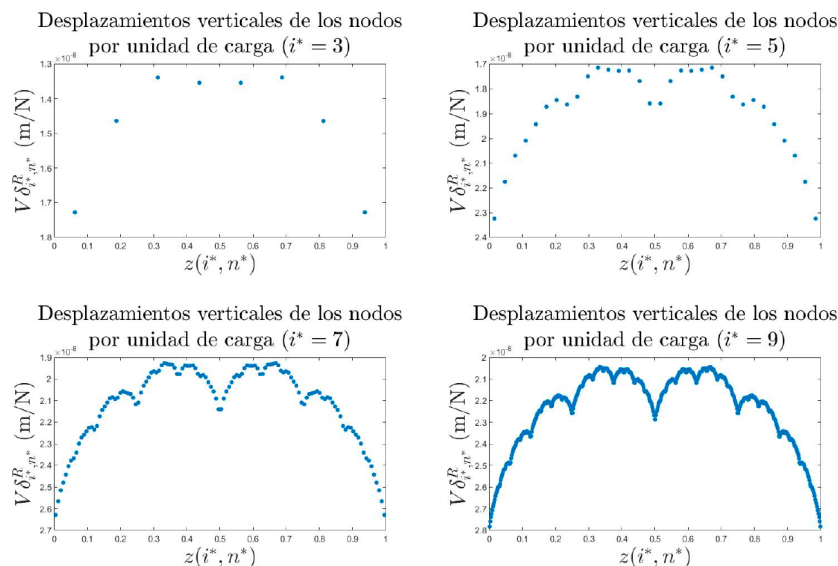


Figura 5.2. Desplazamientos verticales $V\delta_{i^*, n^*}^R$ por unidad de carga según la posición $z(i^*, n^*)$, del nodo en un árbol binario. El eje vertical se muestra invertido para ofrecer una mejor representación de la forma final de la estructura. Los parámetros del árbol son $\theta = \pi/3$, $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$, $G = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $L = 0,5 \text{ m}$, $I = 3,1416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, $A = 3,1416 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $A' = 2,8274 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $a = 9$, $u = 3$, $v = 3$.

Los desplazamientos verticales, que denotamos por $V\delta_{i^*,n^*}^R$, de cada nodo n^* de algunos niveles i^* se muestran, en función de su coordenada horizontal $z(i^*, n^*)$, en la Figura 5.2 (como referencia, los nodos primero y último de un nivel infinito $i^* \rightarrow \infty$ tienen coordenada 0 y 1 respectivamente). Lo que observamos en dicha Figura es que los desplazamientos siguen combinaciones lineales de prefractales de la función de Takagi, y a mayor nivel, mayor cercanía al fractal de Takagi. De hecho, en un nivel teórico infinito, los nodos de la copa o bien se desplazan verticalmente siguiendo una combinación lineal de la función de Takagi si $1 < a < 16$, $1 < u < 4$ y $1 < v < 4$, o bien se hacen infinitos para valores de los parámetros mecánicos fuera de esos intervalos (34).

Los desplazamientos horizontales, que denotamos por $H\delta_{i^*,n^*}^R$, de cada nodo n^* de algunos niveles i^* se muestran, en función de su coordenada horizontal $z'(i^*, n^*)$, en la Figura 5.3 (como referencia, los nodos primero y último de cada nivel tienen coordenada 0 y 1 respectivamente). Los desplazamientos horizontales son resultado de la combinación de tres prefractales de funciones inversas de β -Cantor (30), una para el momento flector, otra para el esfuerzo axial y otra para el cortante, donde el parámetro β depende respectivamente de a , u y v . De hecho, en un nivel teórico infinito, los nodos de la copa o bien se desplazan horizontalmente siguiendo una combinación lineal de tres inversas de funciones β -Cantor si $1 < a < 16$, $1 < u < 4$ y $1 < v < 4$, o bien se hacen infinitos para valores de los parámetros mecánicos fuera de esos intervalos (34).

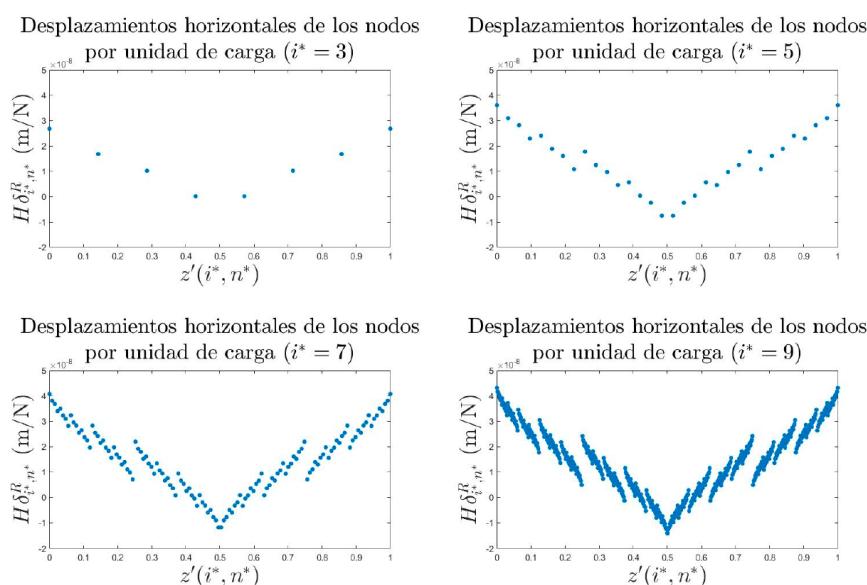


Figura 5.3. Desplazamientos horizontales $H\delta_{i^*,n^*}^R$ por unidad de carga según la posición $z'(i^*, n^*)$, del nodo en un árbol binario. Un valor positivo indica hacia la izquierda si $z'(i^*, n^*) < 1/2$ y hacia la derecha si $z'(i^*, n^*) > 1/2$. Los parámetros del árbol son $\theta = \pi/3$, $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$, $G = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $L = 0,5 \text{ m}$, $I = 3,1416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, $A = 3,1416 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $A' = 2,8274 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $a = 9$, $u = 3$, $v = 3$.

La combinación de ambos desplazamientos en cada nodo, vertical y horizontal, genera la forma deformada que se muestra en la Figura 5.4. Por tanto, la forma deformada tras carga de un árbol viene dada por la combinación de los fractales Takagi y β -Cantor, lo que indica una conexión entre ambos. De hecho, comprobamos que sus dimensiones fractales, D_Ψ y D_C para Takagi y el β -Cantor correspondiente a los momentos flectores respectivamente, se relacionan mediante la siguiente expresión (34):

$$D_\Psi + \frac{1}{D_C} = 2$$

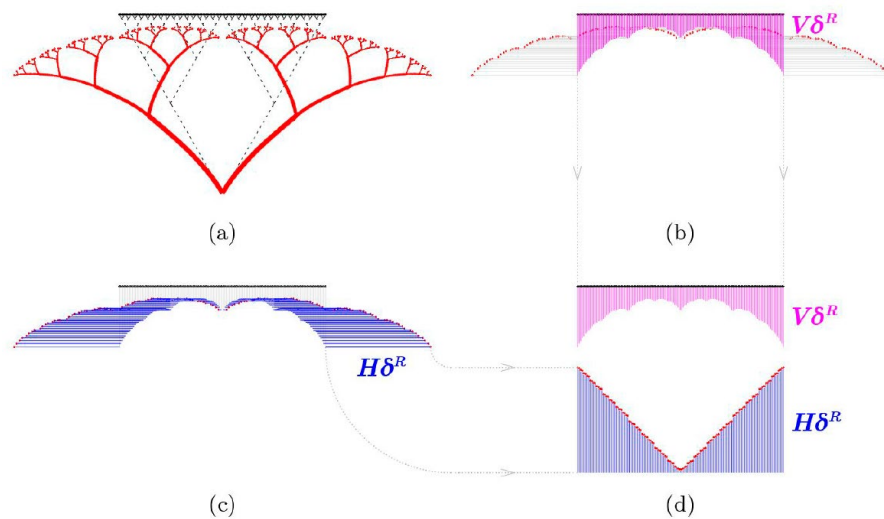


Figura 5.4. (a) Árbol binario sin deformar (línea discontinua negra) y deformado (línea continua roja), (b) Desplazamientos verticales $V\delta^R$ de los nodos del último nivel en magenta, (c) Desplazamientos horizontales $H\delta^R$ de los nodos del último nivel en azul y (d) Curva de Takagi y combinación lineal de inversas de funciones β -Cantor, mostrando los desplazamientos horizontales $H\delta^R$ en vertical.

Como conclusiones, es interesante notar que los fractales que rigen los desplazamientos del árbol dependen de sus parámetros mecánicos. Esto implica que la forma deformada puede cambiar drásticamente sin cambiar su forma original (árbol binario), sino simplemente alterando sus características mecánicas. En particular, el parámetro a , que representa la reducción de la inercia de las ramas de un nivel al siguiente, es el que controla tanto los desplazamientos verticales (como parámetro de la curva de Takagi) como los horizontales (como parámetro de una de las funciones inversas de β -Cantor).

6. GENERACIÓN DE SUPERFICIES PREFRACTALES

En las Secciones 2 y 5 hemos trabajado con la función de Takagi. Dicha función se obtiene como una suma infinita de ondas triangulares de amplitudes decrecientes y frecuencias crecientes. Motivados por la idea de extender este método de construcción de fractales, utilizamos funciones diferentes a la onda triangular, obteniendo diferentes gráficas de

aspecto fractal. Yendo un paso más allá, pasamos de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} a funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , con lo que conseguimos superficies con aspecto fractal que modelan elementos arquitectónicos y decorativos. Finalmente, añadimos factores aleatorios a este método, obteniendo superficies aleatorias de aspecto fractal que simulan montañas, cráteres o dunas. Por tanto, el método presentado en esta sección es un método de generación de superficies prefractales que dispone de una amplia variedad de parámetros, con lo que el diseñador puede modelarla a su gusto. Por tanto, este método es de aplicación directa en simuladores, videojuegos o el metaverso.

Para describir este método, necesitamos las siguientes definiciones:

- Región de definición del prefractal: denotada por Φ , es un polígono regular de k lados en el que se define la superficie prefractal.
- Sucesión de conjunto de sitios: denotada por $\{\Omega_n\}_{n=1}^{N \in \mathbb{N}}$, es una sucesión de conjuntos, denotados por Ω_n , de puntos contenidos en Φ , denominados sitios. Cada conjunto de sitios tiene k^{n-1} sitios.
- Función de teselación: denotada por λ_n^* , es la función que a cada punto (x, y) de Φ le asocia el sitio del conjunto Ω_n más cercano según una métrica basada en una norma p . Notemos que, para cada n , λ_n^* genera en Φ una teselación con k^{n-1} teselas, una por cada sitio del conjunto Ω_n .
- Función semilla: denotada por f , es una función que asocia a cada punto (x, y) de Φ un cierto valor, tomando λ_n^* como parámetro. Así, dos puntos pertenecientes a una misma tesela tomarán la función f con el mismo parámetro, mientras que dos puntos pertenecientes a diferentes teselas tomarán dicha función con dos parámetros distintos.
- Superficie prefractal de orden N : Denotada por S_N , devuelve para cada punto (x, y) de Φ la suma de la función f evaluada en dicho punto con los sucesivos parámetros $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*$, y multiplicada por un peso. Específicamente, viene dada por $S_N(x, y) = \sum_{n=1}^N \theta^{n-1} f(x, y; \lambda_n^*(x, y))$, donde $\theta > 0$ es el peso.

Los conjuntos de sitios se pueden determinar de infinitas maneras. En este trabajo mostraremos, como ejemplo, conjuntos de sitios denotados por Ω_n^T generados de la siguiente manera: el primer conjunto, Ω_1^T , contiene únicamente como sitio al punto $(0,0)$. El segundo conjunto, Ω_2^T , contiene k sitios que se encuentran todos a distancia L del sitio $(0,0)$ del conjunto anterior Ω_1^T , y el ángulo que forman la horizontal y la recta que une cada sitio con el $(0,0)$ se determina aleatoriamente. En general, el conjunto Ω_n^T se obtiene a través de los sitios del conjunto Ω_{n-1}^T , generando desde cada uno de sus sitios k nuevos sitios a distancia $L \cdot r^{n-2}$ y con ángulo aleatorio. En la Figura 6.1 se muestran los sitios de conjuntos $\Omega_1^T, \Omega_2^T, \dots, \Omega_6^T$.

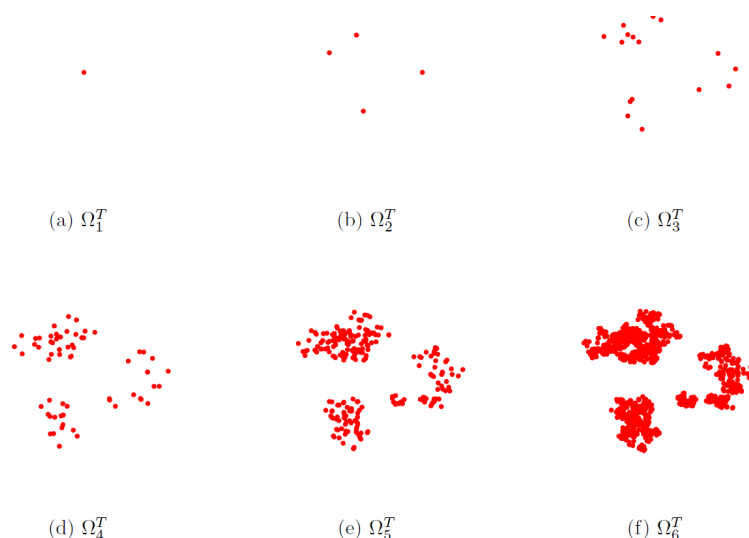


Figura 6.1. Sitios de los conjuntos $\Omega_1^T, \Omega_2^T, \dots, \Omega_6^T$ generados tomando $k = 4, L = 0,25$ y $r = 0,5$.

De igual manera, dada una sucesión de conjuntos de sitios, se pueden formar tantas teselaciones como normas p existentes. A modo de ejemplo, en la Figura 6.2 mostramos las teselaciones correspondientes a cada conjunto $\Omega_1^T, \Omega_2^T, \dots, \Omega_6^T$ anterior utilizando las funciones de teselación $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_6^*$, con la norma 2.

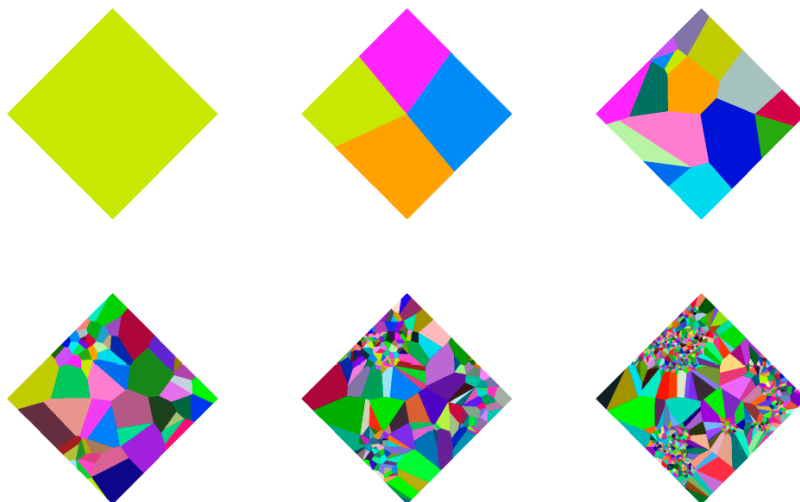


Figura 6.2. Teselaciones correspondientes a cada conjunto $\Omega_1^T, \Omega_2^T, \dots, \Omega_6^T$ mostrado en la Figura 6.1 utilizando las funciones de teselación $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_6^*$, con la norma 2.

Una vez obtenidas las sucesivas teselaciones, podemos aplicar sobre cada una de ellas una infinidad de funciones semilla. A modo de ejemplo, en la Figura 6.3 mostramos la aplicación de la función piramidal de cuatro caras sobre cada una de las teselaciones presentadas en la Figura 6.2. Esta función genera una pirámide en cada tesela cuyo vértice superior se sitúa en el sitio correspondiente a dicha tesela.

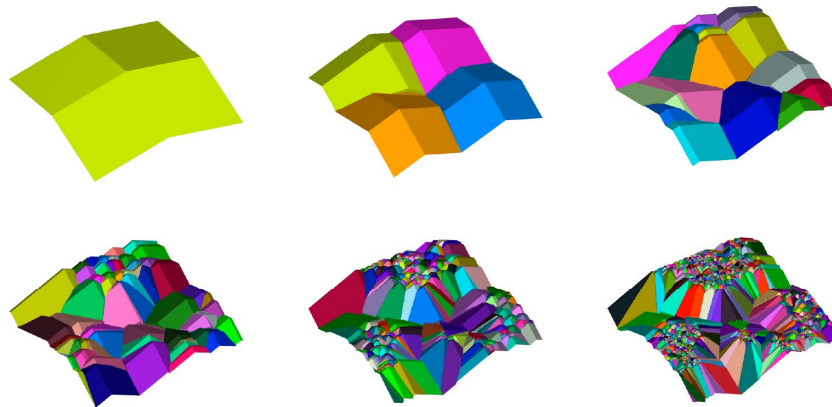


Figura 6.3. Función piramidal de cuatro caras aplicada en cada una de las teselaciones mostradas en la Figura 6.2.

Como vemos en la Figura 6.3, se han generado tantas superficies como teselaciones (y, por tanto, como conjuntos de sitios), cuyo número es N . Por tanto, la superficie prefractal final es el resultado de sumar las N superficies ponderadas por pesos. En resumen, el método se integra de los siguientes pasos:

1. Se eligen sucesivos conjuntos de sitios $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ en Φ .
2. Se genera una teselación por cada conjunto de sitios según la función de teselación λ_n^* con la métrica basada en la norma p elegida.
3. La función semilla f se calcula en las teselas de cada teselación usando como parámetro la función λ_n^* , que es diferente para cada tesela.
4. Finalmente, la superficie prefractal se obtiene sumando cada función semilla de $n = 1$ a $n = N$ ponderada cada una por el peso θ^{n-1} .

Con este método se pueden generar superficies realistas que simulan terrenos naturales como terrenos con cráteres (ver Figura 6.4a), terrenos montañosos con fallas (ver Figura 6.4b) o cañones (ver Figura 6.4c), entre otros. Estas superficies se han obtenido utilizando conjuntos de sitios determinados por alguna componente aleatoria. Sin embargo, se pueden utilizar también conjuntos de sitios deterministas, con lo que el método genera elementos arquitectónicos o decorativos (ver Figura 6.4d) (35).

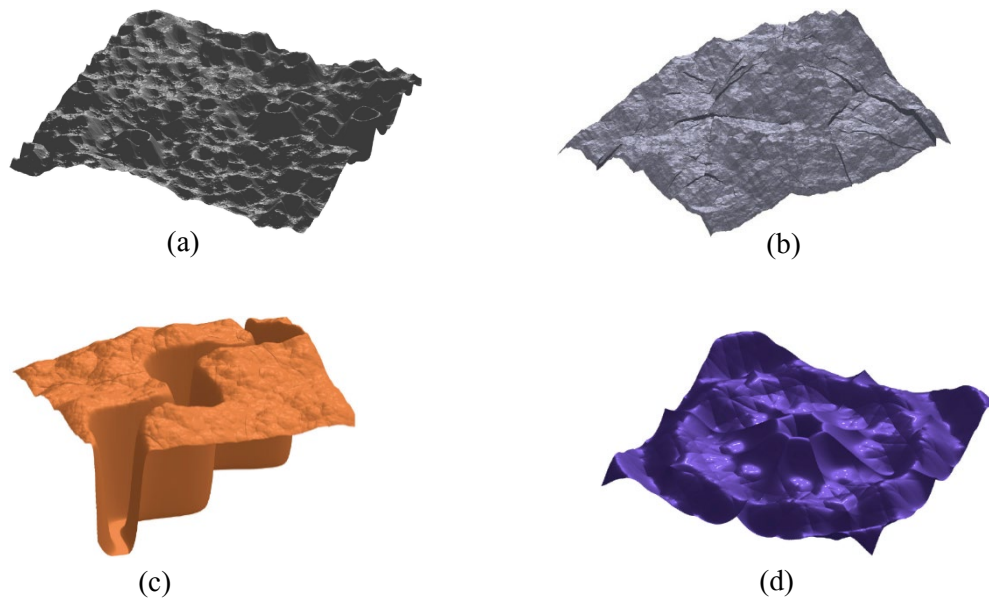


Figura 6.4. Superficies prefractales que simulan (a) terrenos con cráteres, (b) terrenos montañosos con fallas, (c) cañones y (d) elementos decorativos.

Como conclusiones, destacamos que el método presentado permite generar superficies complejas y realistas a partir de funciones semillas sencillas. Además, este método otorga a los diseñadores una gran capacidad de control gracias a los numerosos parámetros de los que dispone, siendo capaces de crear superficies deterministas tales como formas arquitectónicas o superficies aleatorias tales como cráteres, montañas y cañones.

7. FUNCIONES FRACTALES

En la Sección 6 hemos visto cómo la extensión del método de construcción de la curva de Takagi a través de una suma infinita daba lugar a superficies con aspecto fractal. En esta Sección vamos a demostrar que esta extensión, con funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} como primera aproximación, genera funciones efectivamente fractales. Para ello, vamos a utilizar el operador contractivo de Read-Bajraktarevic (operador RB, en adelante).

El operador RB, que denotamos por Ξ , es un operador que actúa sobre funciones acotadas para devolver funciones también acotadas. En particular, este operador es contractivo, esto es, para cualesquiera dos funciones f y g , la distancia entre Ξf y Ξg es menor o igual que entre f y g ; esto significa que el operador “contrae” el eje de ordenadas de la gráfica de la función sobre la que se aplica. Toda función f que sea igual al resultado de aplicar dicho operador sobre ella misma (es decir, es un punto fijo, $f = \Xi f$), es una función fractal (36, 37).

Por otra parte, sea el conjunto X cualquiera, definimos la clase G de funciones como el conjunto de funciones g de X a \mathbb{R} cuya expresión viene dada por

$$g(x; \alpha, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n t\left(\frac{|x - \lambda_n(x; \alpha)|}{\gamma_n(x)}\right),$$

donde α y θ son parámetros que detallaremos a continuación, así como el resto de los elementos que integran la expresión. Por simplicidad, asumimos $X = [0,1)$.

En primer lugar, consideramos un conjunto de M funciones, que denotamos por u_m , que dividen el intervalo X en M subintervalos que no intersecan de amplitud a_m , con $m = 1, 2, \dots, M$, tales que $\sum_{m=1}^M a_m = 1$. Es decir, las funciones u_m realizan una primera partición (correspondiente a $n = 1$), de M elementos, del intervalo X , y si aplicamos de nuevo cada función u_m sobre cada subintervalo, generaremos una segunda partición (correspondiente a $n = 2$), de M^2 elementos. En general, si aplicamos cada función u_m sobre cada subintervalo de la $n - 1$ -ésima partición, generaremos la n -ésima partición, de M^n elementos, del intervalo X . Así pues, dado un valor $x \in X$, éste pertenecerá a sucesivos subintervalos de las sucesivas particiones. En particular, consideraremos que la partición cero es el propio intervalo X .

Dada la n -ésima partición de X , denotamos por $\lambda_n(x; \alpha)$ a la función que devuelve la media ponderada por el parámetro α de los dos límites del subintervalo al que pertenece x ; esto es, si $\alpha = 0$ entonces $\lambda_n(x; \alpha)$ devuelve el límite inferior, si $\alpha = 1$, $\lambda_n(x; \alpha)$ devuelve el límite superior y si $\alpha = 1/2$ entonces $\lambda_n(x; \alpha)$ devuelve la media aritmética. Por otra parte, denotamos por $\gamma_n(x; \alpha)$ a la función que devuelve el producto de las amplitudes de los sucesivos subintervalos a los que pertenece x , desde la primera partición hasta la n -ésima. Por último, denotamos por t a una función acotada cualquiera de X a \mathbb{R} , y por θ a un parámetro perteneciente al intervalo $[0,1)$.

Utilizando el operador RB, demostramos que toda función g así construida es un punto fijo del operador, por lo que es una función fractal (20). Conceptualmente, lo que hace la función g es lo siguiente: dado un $n = 0, 1, 2, \dots$, aplica la función acotada t sobre una traslación y escalado del punto x en el propio eje X en función del subintervalo de la n -ésima partición al que pertenece, y multiplica el valor de dicha función por θ^n para provocar una contracción en el eje Y . De esta forma se consigue obtener la propiedad fractal de invariancia por cambio de escala.

A modo de ejemplo, en la Figura 7.1 mostramos algunas funciones fractales de la clase G . Notemos que la clase G es una clase que extiende la curva de Takagi (ver Figura 7.1a) para contemplar funciones fractales muy diversas.

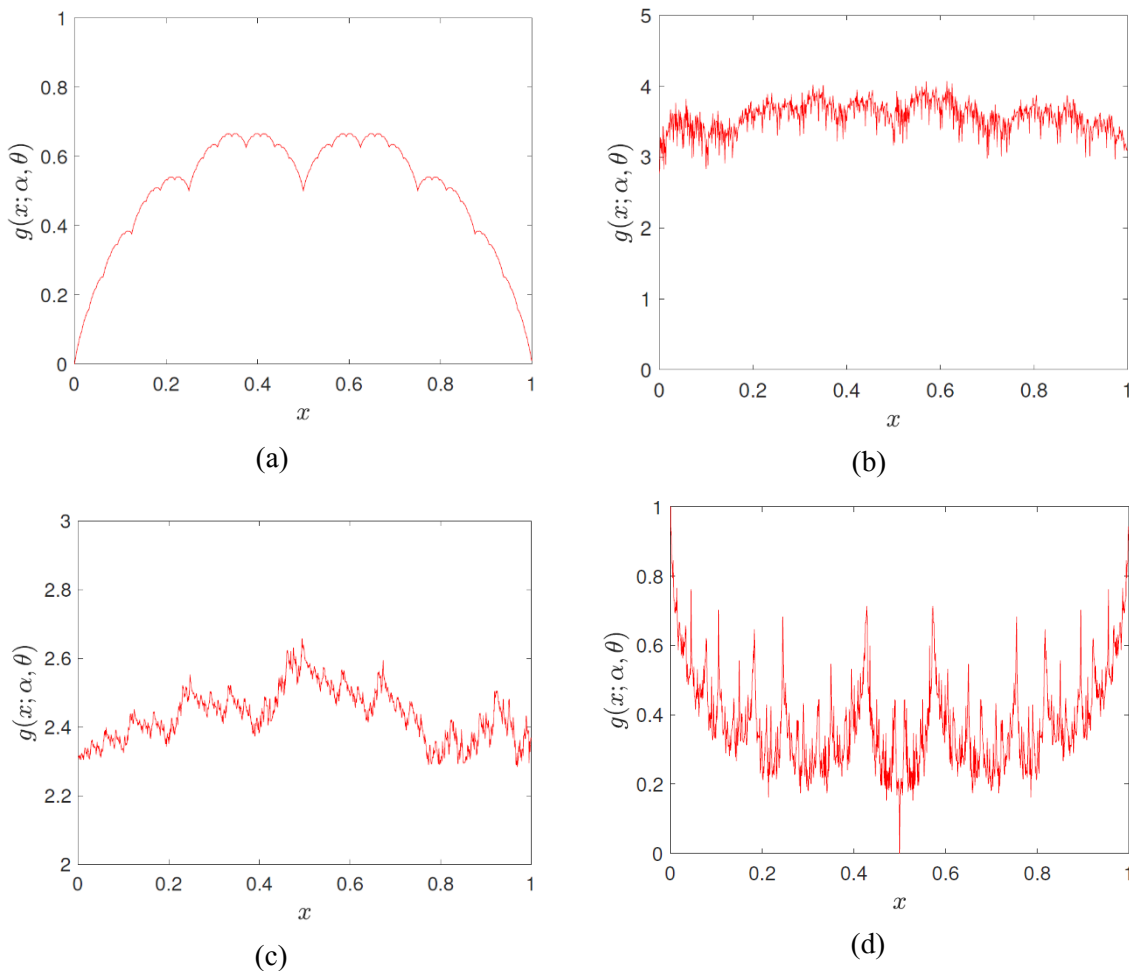


Figura 7.1. Ejemplos de funciones fractales de la clase G . En particular, (a) función obtenida con $\{a_1, a_2\} = \{1/2, 1/2\}$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 1/2$ y $t(x) = 1/2 - x$, (b) función obtenida con $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{0,1,0,4,0,2,0,3\}$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 0,8$ y $t(x) = \exp(-x)$, (c), función obtenida con $\{a_1, a_2, a_3\} = \{0,5,0,35,0,15\}$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 0,7$ y $t(x) = x^x$ y (d) función obtenida con $\{a_1, a_2, a_3\} = \{3/7, 1/7, 3/7\}$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 0,8$ y $t(x) = x^2$.

8. TRANSFERENCIA TECNOLÓGICA

Como consecuencia de obtener la patente ES2909950 de la Estructura de quasi-Sierpinski genérica estudiada en la Sección 2, mi director de tesis Jesús San Martín y yo deseamos ponerla en conocimiento de la sociedad y obtener su explotación, tanto por la satisfacción personal de ver cómo la patente se desarrolla como por el deseo de contribuir a nuestra sociedad.

Por esta razón, nos apuntamos en marzo de 2022 a un programa de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) de creación de empresas, actúaupm, siendo seleccionados para participar entre casi 400 proyectos solicitantes y obteniendo uno de los diez premios a las mejores ideas de la primera fase. En noviembre de 2022 se realizó la entrega final de premios, donde se nos comunicó que habíamos resultado entre los ocho mejores proyectos. Paralelamente, también nos presentamos al programa UPM2T de comercialización de

tecnologías, en el que obtuvimos el segundo premio. En ambos programas rebautizamos la estructura patentada como Distribuidor Óptimo de Cargas (DOC), y decidimos que su comercialización se haría mediante una startup que nosotros mismos fundaríamos: Applied Fractal Structures (AFS).

Gracias a nuestra participación en actúaupm y UPM2T nos contactó un fondo de inversión que estaba interesado en nuestra startup. Tuvimos dos reuniones con este fondo de inversión; en la primera nos pidieron más detalles acerca de nuestro proyecto y en la segunda nos realizaron una propuesta de constitución de empresa que incluía la inversión inicial de 1.000.000€ para el capital social de la empresa. Sin embargo, tras consultar la propuesta con varios asesores, tanto de la UPM como externos, concluimos que para nuestros intereses y para la startup la mejor decisión era rechazar la propuesta del fondo de inversión y continuar desarrollando el proyecto por nuestra cuenta.

En los meses posteriores redefinimos el cliente objetivo hacia el que nos dirigíamos. En las primeras fases del proyecto estábamos totalmente orientados a multinacionales que construyesen grandes infraestructuras en el mar, como los aeropuertos, ya que el DOC presenta ventajas económicas, temporales y ecológicas con respecto a la solución actual, la isla artificial. Sin embargo, la magnitud de estos proyectos y de las empresas que los llevan a cabo hacen que sea prácticamente imposible acceder a ellos desde una posición de empresa emergente como la nuestra. Por este motivo, empezamos a buscar clientes más pequeños, y en primer lugar pensamos que el DOC es de interés para aquellas empresas que realizan extensiones de ciudades costeras y construyen microislas con fines residenciales. Yendo un paso más allá, nos dimos cuenta de que el DOC puede usarse para construir plataformas para que los hoteles y resorts de lujo que se encuentran en el mar dispongan sus servicios, como restaurantes o tiendas. Así pues, las cadenas hoteleras y sus inversores son nuestro cliente objetivo más pequeño.

Durante el desarrollo del proyecto hemos contactado con diferentes clientes potenciales, desde multinacionales hasta inversores hoteleros. En particular, hemos tenido varias reuniones con un inversor de hoteles en México y hemos contactado con el ministerio de turismo de Mauricio. También hemos expuesto nuestro proyecto ante el director del Centro de Desarrollo Tecnológico e Innovación (CDTI), Javier Ponce, y el exministro de Ciencia e Innovación Pedro Duque, entre otros, con el fin de que el CDTI valorase la posible inversión de nuestro proyecto. El CDTI nos invitó a solicitar fondos una vez que nos hubiéramos constituido como empresa.

Respecto al desarrollo industrial del DOC, construimos un primer prototipo de la patente, en acero y a tamaño real (ver Figura 8.1), para ser ensayado en laboratorio y comprobar

que distribuye la carga uniformemente. Estos primeros ensayos no fueron satisfactorios debido a unas malas condiciones del equipo de medida que llevaron a un desgaste del prototipo, por lo que actualmente estamos construyendo una segunda estructura para volver a ensayarla en unas condiciones ya corregidas.

En conclusión, nos encontramos a la espera de ensayar la estructura y obtener así unos resultados satisfactorios que nos permitan contactar con antiguos y nuevos clientes partiendo de una posición de mayor fortaleza al contar con el respaldo de los experimentos.



Figura 8.1. Prototipo en acero a tamaño real del DOC.

9. CONCLUSIONES

Hemos atendido a la protección contra impactos de basura espacial diseñando tres estructuras fractales que distribuyen una carga puntual de manera uniforme, la cual es la distribución óptima al requerir la menor resistencia de la base sobre la que se apoya. La primera es la Estructura de quasi-Sierpinski, en la cual se disponían apoyos fijos horizontales en primera instancia por su facilidad de instalación. Sin embargo, esta disposición implicaba que los apoyos tuvieran que desplazarse verticalmente (instalando, por ejemplo, muelles), y encontramos que estos desplazamientos seguían una combinación lineal de una función fractal: la curva de Takagi. Para evitar tener que colocar apoyos que se desplazaran siguiendo una complicada curva fractal relajamos las condiciones de diseño, llegando a la Estructura de quasi-Sierpinski genérica (patentada), cuyos apoyos son móviles horizontalmente. Esta estructura consigue la distribución uniforme sin tener que desplazar sus apoyos verticalmente, lo que la hace idónea para cimentar en suelos poco resistentes, como el marino.

También hemos extendido esta estructura a un diseño tridimensional, la Pirámide de quasi-Sierpinski (también patentada), con propiedades y aplicaciones similares.

El estudio de la protección frente a la radiación nos ha llevado a comparar diferentes distribuciones de masa: porosa en rejilla, hexagonal y aleatoria y multicapa. Hemos concluido mediante métodos numéricos que las distribuciones porosas ofrecen, en promedio, el mismo nivel de protección entre sí y que la multicapa cuando su número de poros tiende a infinito. Sin embargo, hemos encontrado que las distribuciones regulares ofrecen un nivel de protección menor para ciertos ángulos, por lo que es preferible usar distribuciones aleatorias. El análisis radiológico y de la disipación del calor asociado lo hemos completado mediante un estudio en el que concluimos que las mixturas asimétricas de Koch son efectivas para drenar el calor. En particular, hemos visto que los fractales sólo son útiles para disipar el calor cuando están desarrollados sólo en las zonas cercanas a la fuente de calor.

La investigación completada en la tesis nos ha llevado al estudio de otros problemas derivados, como el cálculo de las deformaciones de estructuras arbóreas cuando son cargadas en su copa. Hemos concluido que la forma deformada de las estructuras arbóreas estudiadas es una combinación de tres fractales: el árbol binario que representa su forma sin carga, la curva de Takagi que determina sus desplazamientos verticales y la función β -Cantor que determina sus desplazamientos horizontales. De hecho, las dimensiones fractales de la curva de Takagi y de la función β -Cantor están relacionadas mediante un parámetro mecánico de la estructura.

Otro problema que hemos considerado es la generación de superficies prefractales que simulan terrenos y elementos arquitectónicos. El método de generación que hemos creado tiene aplicación directa en simuladores, videojuegos y el metaverso ya que ofrece una gran capacidad de control al diseñador, por su elevado número de parámetros, y versatilidad, al generar indistintamente superficies deterministas y aleatorias. En relación con este problema, hemos definido una cierta clase de funciones que hemos demostrado que son efectivamente fractales, demostración que hemos realizado usando el operador contractivo de Read-Bajraktarevic.

Por último, estamos transfiriendo la tecnología de una de las patentes concedidas al mercado mediante la creación de una startup. Concluimos que este proceso de transferencia requiere de un gran desarrollo de los aspectos de la tecnología no relacionados con la propia investigación, tales como identificación de clientes, estudio de mercado, modelos de negocio, etc.

10. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) "NASA: Fiscal Year 2025 Budget Request." <https://www.nasa.gov/fy-2025-budget-request/> . Acceso: 22/04/2025.
- (2) "NASA Space Science Data Coordinated Archive." <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/SpacecraftQuery.jsp> . Acceso: 22/04/2025.
- (3) "SpaceX: Falcon 9 capabilities & services." <https://www.spacex.com/media/Capabilities&Services.pdf> . Acceso: 22/04/2025.
- (4) "NASA: Space Debris." <https://www.nasa.gov/headquarters/library/find/bibliographies/space-debris/> . Acceso: 22/04/2025
- (5) "ESA: Space debris by the numbers." <https://www.nasa.gov/headquarters/library/find/bibliographies/space-debris/> . Acceso: 22/04/2025
- (6) "ESA: Hypervelocity impacts and protecting spacecraft." https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Hypervelocity_impacts_and_protecting_spacecraft . Acceso: 22/04/2025.
- (7) "España, Boletín Oficial del Estado." <https://www.boe.es/boe/dias/2017/11/24/pdfs/BOE-A-2017-13615.pdf> . Acceso: 22/04/2025.
- (8) "SIA: State of the Satellite Industry Report." <https://sia.org/news-resources/state-of-the-satellite-industry-report/> . Acceso: 22/04/2025.
- (9) "ESA: Hypervelocity impacts and protecting spacecraft." https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Hypervelocity_impacts_and_protecting_spacecraft . Acceso: 22/04/2025.
- (10) W. P. Schonberg, "Hypervelocity impact response of spaced composite material structures," International Journal of Impact Engineering, vol. 10, no. 1-4, pp. 509-523, 1990.
- (11) W. P. Schonberg and E. J. Walker, "Hypervelocity impact of dual-wall space structures with graphite/epoxy inner walls," Composites Engineering, vol. 4, no. 10, pp. 1045-1054, 1994.
- (12) W. P. Schonberg and E. J. Walker, "Use of composite materials in multi-wall structures to prevent perforation by hypervelocity particle impact," Composite structures, vol. 19, no. 1, pp. 15-40, 1991.

- (13) X. Zhang, T. Liu, X. Li, and G. Jia, "Hypervelocity impact performance of aluminum egg-box panel enhanced whipple shield," *Acta Astronautica*, vol. 119, pp. 48-59, 2016.
- (14) S. Ryan and E. Christiansen, "Hypervelocity impact testing of aluminum foam core sandwich panels," NASA Johnson Space Center, 2015.
- (15) X. Zhang, R. Wang, and Q. Li, "Modeling of hypervelocity impact of sandwiched open cell aluminum foam," *Procedia Engineering*, vol. 204, pp. 262-269, 2017.
- (16) E. Lespessailles, A. Jullien, E. Eynard, R. Harba, G. Jacquet, J. Ildefonse, W. Ohley, and C. Benhamou, "Biomechanical properties of human os calcanei: relationships with bone density and fractal evaluation of bone microarchitecture," *Journal of biomechanics*, vol. 31, no. 9, pp. 817-824, 1998.
- (17) M. A. Meyers, P. Y. Chen, A. Y. M. Lin, and Y. Seki, "Biological materials: structure and mechanical properties," *Progress in Materials Science*, vol. 53, no. 1, pp. 1-206, 2008.
- (18) T. S. Khire, J. Kundu, S. C. Kundu, and V. K. Yadavalli, "The fractal self-assembly of the silk protein sericin," *Soft Matter*, vol. 6, no. 9, pp. 2066-2071, 2010.
- (19) J. Rodríguez-Cuadrado, and J. San Martín, "Sierpinski-Takagi combination for a uniform and optimal point-surface load transmission," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 105, p. 307-320, 2022.
- (20) J. Rodríguez Cuadrado, "[Optimización de la geometría de los escudos de estructuras espaciales y sus aplicaciones](https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.78445)". Tesis (Doctoral), [E.T.S.I. Diseño Industrial \(UPM\)](https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.78445). <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.78445>.
- (21) M. A. Sazali, N. K. A. M. Rashid, and K. Hamzah, "A review on multilayer radiation shielding," in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 555, p. 012008, IOP Publishing, 2019.
- (22) J. Rodríguez-Cuadrado, and J. San Martín, "Shielding material distributions and associated fractals," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 158, p. 112008, 2022.
- (23) V. Phogat and L. Aylmore, "Evaluation of soil structure by using computer-assisted tomography," *Soil Research*, vol. 27, no. 2, pp. 313-323, 1989.
- (24) C. Windsor, J. Marshall, J. Morgan, J. Fair, G. Smith, A. Rajczyk-Wryk, and J. Tarragó, "Design of cemented tungsten carbide and boride-containing shields for a fusion power plant," *Nuclear Fusion*, vol. 58, no. 7, p. 076014, 2018.
- (25) S. M. Malkapur, S. S. Ghodke, P. Sujatha, Y. Singh, K. Shivakumar, M. Sen, M. C. Narasimhan, and A. V. Pulgur, "Waste-polymer incorporated concrete mixes for neutron and gamma radiation shielding," *Progress in Nuclear Energy*, vol. 135, p. 103694, 2021.

- (26) A. Ortiz-Cruz, C. Santolalla, E. Moreno, J. De Los Reyes-Heredia, and J. Alvarez-Ramirez, "Fractal analysis of powder x-ray diffraction patterns," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, no. 4, pp. 1642-1651, 2012.
- (27) E. Gordillo-Cruz, J. Alvarez-Ramirez, F. González, and J. de los Reyes, "Fractal analysis of x-ray diffraction patterns of zirconia-alumina mixed oxides," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 512, pp. 635-643, 2018.
- (28) M. Cefalo, S. Creo, M.R. Lancia, and J. Rodríguez Cuadrado, "Fractal mixtures for optimal heat draining," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 173, p. 113750, 2023.
- (29) O. Binks, J. Finnigan, I. Coughlin, M. Disney, K. Calders, A. Burt, M. B. Vicari, A. L. da Costa, M. Mencuccini, and P. Meir, "Canopy wetness in the eastern amazon," *Agricultural and Forest Meteorology*, vol. 297, p. 108250, 2021.
- (30) B. D. Miller, K. R. Carter, S. C. Reed, T. E. Wood, and M. A. Cavaleri, "Only sun-lit leaves of the uppermost canopy exceed both air temperature and photosynthetic thermal optima in a wet tropical forest," *Agricultural and Forest Meteorology*, vol. 301, p. 108347, 2021.
- (31) W. Zhang, W. Liu, W. Li, X. Zhu, C. Chen, H. Zeng, X. Jiang, A. K. Singh, and B. Yang, "Characteristics of throughfall kinetic energy under the banana (*musa nana* lour.) canopy: The role of leaf shapes," *Catena*, vol. 197, p. 104985, 2021.
- (32) M. Roulier, M. Bueno, F. Coppin, M. Nicolas, Y. Thiry, F. Rigal, F. Pannier, and I. Le Hécho, "Atmospheric iodine, selenium and caesium depositions in France: II. Influence of forest canopies," *Chemosphere*, vol. 273, p. 128952, 2021.
- (33) T. Kalmár-Nagy and Á. Varga, "Complexity analysis of turbulent flow around a street canyon," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 119, pp. 102-117, 2019.
- (34) J. Rodríguez-Cuadrado, and J. San Martín, "Fractal equilibrium configuration of a mechanically loaded binary tree," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 152, p. 111415, 2021.
- (35) J. Rodríguez-Cuadrado, and J. San Martín, "Design of random and deterministic fractal surfaces from Voronoi cells," *Computer-Aided Design*, vol. 169, p. 103674, 2024.
- (36) A. Read, "Xxiv.-the solution of a functional equation," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, vol. 63, no. 4, pp. 336-345, 1952.
- (37) M. Bajraktarevic, "Sur une équation fonctionnelle," *Glasnik Mat.-Fiz. I Astr.*, vol. 12, no. 3, pp. 201-205, 1957.